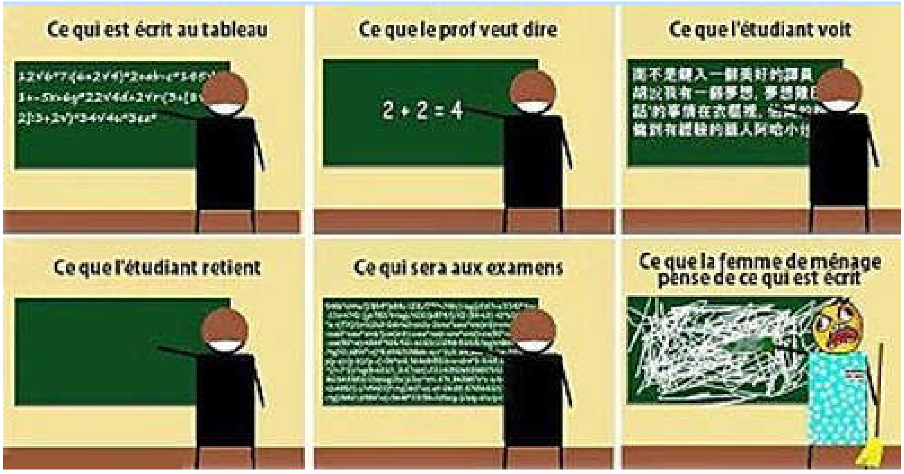
QUESTIONS DE COURS DU DEUXIEME SEMESTRE (MPSI 2)



ALGEBRE

A7. POLYNÔMES

1) Montrer que le produit de deux polynômes (formels) est un polynôme et que si les deux polynômes sont non nuls, le produit est non nul.

2) Montrer l'associativité de la multiplication des polynômes (formels).

3) Énoncer et justifier les propriétés de la valuation et du degré d'une somme, d'un produit de polynômes.

3 bis) Montrer qu'une famille de polynômes de degrés ou de valuations distincts est libre.

4) On pose $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$;
montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R}\quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

5) Montrer que T_n est de degré n et que son coefficient dominant est, pour $n \geqslant 1$, 2^{n-1}.

6) Montrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur l'ensemble des polynômes unitaires (sur un corps).

7) Montrer l'unicité du couple (quotient, reste) de la division euclidienne dans K[X].

8) Détermination des racines d'un polynôme du deuxième degré dans K[X].

9) Montrer que x_0 est racine de $P \Leftrightarrow (X - x_0) \mid P$. En déduire qu'un polynôme non nul a un nombre q de racines distinctes inférieur ou égal à son degré.

10) Montrer que si deux polynômes sont égaux en une infinité de points de K, ils sont égaux, et donc égaux en tout point de K. Montrer par exemple que si $\forall \theta \in \mathbb{R}\quad P(\cos\theta) = \cos n\theta$, alors P est égal au n-ième polynôme de Tchebychev T_n.

11) Facultatif : Montrer que l'application qui à tout polynôme de $K[X]$ fait correspondre la fonction polynomiale de $I \subset K$ dans K associée est une bijection de $K[X]$ sur $\mathsf{P}(I, K)$ si I est infini.

12) Définir la notion de racine multiple et montrer que si un polynôme P s'écrit sous la forme
$\left(\prod_{i=1}^{q} (X - x_i)^{\alpha_i}\right) Q$ (Q sans racine dans K, les x_i distincts), alors

$$q \leq r = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \leq n = deg(P).$$

Donner un exemple avec $q = 2$, $r = 3$, $n = 7$.

13) Formule de Taylor (en 0 et en x_0) pour les polynômes.

14) Montrer que x_0 est racine d'ordre k de $P \Rightarrow \forall i \in [0, k-1]\quad P^{(i)}(x_0) = 0$, et $P^{(k)}(x_0) \neq 0$
.

15) Réciproque de 14).

16) Montrer qu'un polynôme irréductible de degré supérieur ou égal à 2 n'a pas de racine, que la réciproque est fausse, mais qu'elle est vraie si on se limite aux polynômes de degré 2 ou 3.

17) Définir le conjugué de $P \in \mathbb{C}[X]$; montrer $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$ et que
z_0 est racine d'ordre k de $P \Leftrightarrow \overline{z_0}$ est racine d'ordre k de $\overline{P}$;
conséquence quand $P \in \mathbb{R}[X]$.

18) Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss ; en déduire que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé et la détermination des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

19) Écrire la forme générale de la décomposition de $P \in \mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles, et la déterminer pour $P = X^n - 1, n = 2p$.

20) Idem, mais $n = 2p + 1$.

21) Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

22) Si $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les trois fonctions symétriques élémentaires de $a, b, c,$ calculer $a^3 + b^3 + c^3$ en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, à l'aide du polynôme $X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$.
(facultatif : calculer aussi $a^4 + b^4 + c^4$)

23) Énoncer et justifier les propriétés du degré d'une somme, d'un produit de fractions rationnelles. En déduire que la somme de deux fractions rationnelles de degré < 0 est une fraction rationnelle de degré < 0.

24) Facultatif : Montrer que toute fraction rationnelle s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme (sa "partie entière") et d'une fraction rationnelle de degré < 0 (23) est supposé connu). En déduire que la partie entière d'une somme de fractions rationnelles est la somme des parties entières.

25) Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{A}{(X - x_0)^k Q}$ $(Q(x_0) \neq 0)$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a_k}{(X - x_0)^k} + \dfrac{A_1}{(X - x_0)^{k-1} Q}$ (unicité non demandée).

26) : Facultatif : 25) étant connu, montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{A}{(X - x_0)^k Q}$ $(Q(x_0) \neq 0)$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a_1}{X - x_0} + \ldots + \dfrac{a_k}{(X - x_0)^k} + \dfrac{A_k}{Q}$; ($\sum_{i=1}^{k} \dfrac{a_i}{(X - x_0)^i}$ = partie polaire relative à x_0 ; l'unicité de l'écriture n'est pas demandée).

27) Facultatif : Connaissant 26), montrer que toute fraction rationnelle F est la somme de ses parties polaires et d'une fraction sans pôle G qui, lorsque le dénominateur de F est scindé, est la partie entière de F.

28) Montrer que dans l'écriture : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{(X - x_0)^k Q} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{a_i}{(X - x_0)^i} + \dfrac{A_1}{Q}$ $(Q(x_0) \neq 0)$,

$$a_k = \frac{A(x_0)}{Q(x_0)} = k! \frac{A(x_0)}{B^{(k)}(x_0)}.$$

29) Connaissant 28) décomposer $\dfrac{1}{X^n - 1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$.

A8. ALGÈBRE LINEAIRE.

1) Donner 6 exemples d'applications linéaires dont trois en analyse.

2) Montrer qu'en dimension 1 les seules applications linéaires sont les homothéties.

3) Donner la définition d'une projection et montrer que c'est une application linéaire.

4) Montrer que $L(E,F)$est un sous-espace vectoriel de F^E.

5) Donner la définition des affinités vectorielles et montrer qu'elles recouvrent les projections, les symétries et les homothéties.

6) Montrer que $(L(E), +, \circ)$ est un anneau (unitaire).

7) Montrer que si $\dim(E) \geqslant 2$, $L(E)$ n'est ni commutatif ni intègre.

8) Montrer que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ, et qu'il est réduit à $\{ \vec{0} \}$ ssi l'application est injective.

9) Interpréter les ensembles suivants comme noyaux d'applications linéaires :
- l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues.

- $K_n[X]$.

- $E_{a,b} = \{(u_n) \in K^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

10) Montrer qu'une application linéaire est injective ssi l'image d'une base de l'espace de départ est une famille libre de l'espace d'arrivée.

11) Montrer qu'une application linéaire est surjective ssi l'image d'une base de l'espace de départ est une famille génératrice de l'espace d'arrivée. Que conclure de 10) et 11) ?

12) Montrer que la réciproque d'un isomorphisme d'espaces vectoriel est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

13) Montrer que deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes sss'ils ont la même dimension.

14) Montrer le théorème de la restriction (f_1 : $\begin{cases} G \to \mathrm{Im}(f) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est bijective). En déduire que tout supplémentaire du noyau d'une application linéaire est isomorphe à l'image de cette application.

15) Énoncer et démontrer le théorème du rang (connaissant le théorème de la restriction 54)). En déduire que l'image par une application linéaire d'un sous-espace de l'espace de départ, a une dimension inférieure ou égale à celle de ce sous-espace.

16) Connaissant le théorème du rang, montrer : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$, et caractériser les cas d'égalité : $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

17) Montrer qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie est injective ssi elle est surjective. Donner un exemple montrant que ceci est faux en dimension infinie.

18) En application de 17), montrer qu'étant donnés $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in K^n$, les x_i étant distincts, il existe un unique polynôme P de degré $< n$ vérifiant $P(x_i) = y_i \ \forall i \in [1, n]$.

19) Soit $\mathsf{B} = (\vec{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E, et $\mathsf{F} = (\vec{y}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'éléments de F. Montrer qu'il existe une unique application linéaire f de E vers F vérifiant $f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i \quad \forall i \in [1, n]$.

20) Montrer que si B et C sont des bases respectives de E et F, l'application de $L(E, F)$ vers $M_{p,n}(K)$: $f \mapsto mat_{\mathsf{B},\mathsf{C}}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (19) est connu).

21) si B , C et D sont des bases respectives de E, F, et G, de dimensions n,p,q, $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$, $A = mat_{(\mathsf{B},\mathsf{C})}(f)$, $B = mat_{(\mathsf{C},\mathsf{D})}(g)$, $C = mat_{(\mathsf{B},\mathsf{D})}(g \circ f)$ ($C = BA$ par définition), montrer que $C(i,j) = \sum_{k=1}^{p} B(i,k)A(k,j)$.

22) Montrer l'associativité du produit des matrices sans utiliser celle de la composition des applications linéaires.

23) Facultatif : Idem pour la distributivité.

24) Montrer : $\vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow Y = AX$ en explicitant les notations.

25) Montrer que si $A \in M_{n,p}(K)$, l'application linéaire f_A: $\begin{cases} M_{p,1}(K) \to M_{n,1}(K) \\ X \quad \to \quad AX \end{cases}$ est l'application linéaire qui a pour matrice A dans les bases canoniques, montrer que $f_{AB} = f_A \circ f_B$ et en déduire que si $A, B \in M_{n,p}(K)$:

$\left(\forall X \in M_{p,1}(K) \ AX = BX\right) \Rightarrow A = B$.

26) Montrer que si $A = [C_1, C_2, .., C_p] \in M_{n,p}(K)$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_p \end{bmatrix} \in \ker(f_A) \Leftrightarrow x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_pC_p = 0.$$

27) Montrer que $A \in M_n(K)$ est inversible si et seulement si le système $AX = Y$, d'inconnue $X \in M_{n,1}(K)$ et de paramètre $Y \in M_{n,1}(K)$ possède une solution unique, quel que soit Y. Comment obtient-on alors l'inverse de A ?

28) Déterminer à quelle CNS $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

29) Définir la matrice de passage $P = P_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$ de la base B à la base B', l'interpréter comme une matrice de id_E ; en déduire qu'elle est inversible, que : $P_{\mathrm{B},\mathrm{B}''} = P_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} \times P_{\mathrm{B}',\mathrm{B}''}$, et que $P^{-1} = P_{\mathrm{B}',\mathrm{B}}$.

30) Montrer la relation $X = PX'$ en explicitant les notations.

31) Montrer la relation $A' = Q^{-1}AP$ où :
$A = \mathrm{mat}_{(\mathrm{B},\mathrm{C})}(f), A' = \mathrm{mat}_{(\mathrm{B}',\mathrm{C}')}(f)$, $P = \mathrm{mat}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}')$,$Q = \mathrm{mat}_{\mathrm{C}}(\mathrm{C}')$.

32) Montrer que ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$; en déduire que si $A \in GL_n(K)$, ${}^t A \in GL_n(K)$ et $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$.

33) Montrer que $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$ et déterminer leurs dimensions.

34) Montrer, pour A et $B \in M_n(K)$, $tr(AB) = tr(BA)$; en déduire que deux matrices d'un même endomorphisme ont même trace.

35) Montrer que la relation d'équivalence des matrices de $M_{np}(K)$ est bien une relation d'équivalence.

36) Montrer que toute application linéaire de rang r entre espaces de dimensions finie possède une matrice du type : $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

37) En déduire que deux matrices de même format qui ont le même rang sont équivalentes.

38) En déduire que toute matrice a même rang que sa transposée.

39) Montrer que rang d'une matrice est l'ordre maximal d'une matrice carrée extraite inversible.

40) Montrer qu'un endomorphisme tel que l'image de tout vecteur est colinéaire à ce vecteur est une homothétie vectorielle.

41) Facultatif : En déduire qu'un endomorphisme qui commute avec tout endomorphisme est une homothétie (utiliser une projection de base $\mathrm{Vect}(\vec{x})$). Traduction matricielle de cette propriété ?

42) Montrer que $p \in L(E)$ est une projection ssi $p^2 = p$; donner une double expression de la base et de la direction de p.

43) Montrer que $s \in L(E)$ est une symétrie ssi $s^2 = id_E$; donner une double expression de la base et de la direction de s.

44) Montrer que toute forme linéaire non nulle sur E est surjective et que son noyau est un hyperplan de E ; donner l'expression générale d'une forme linéaire dans une base en dimension finie.

45) Donner les deux définitions équivalentes de la similitude de deux matrices carrées. Donner un exemple de deux matrices équivalentes qui ne sont pas semblables.

46) Définir la matrice et le rang d'un système linéaire, et montrer que l'ensemble des solutions, s'il n'est pas vide, est un translaté du noyau de la matrice, de dimension : (nbre d'inconnues) – rang.

47) Soit $f, g \in L(E)$; montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$; en déduire qu'en dimension finie, $g \circ f$ bijective $\Rightarrow f$ et g bijectives . Traduction matricielle ?

48) Facultatif : Montrer que si σ est une permutation finie et t une transposition, $\sigma \circ t$ possède soit une orbite de plus, soit une orbite de moins que σ.

49) En déduire que la parité du nombre de transpositions est la même dans deux décompositions en produit de transpositions d'une même permutation.

50) Montrer que si trois vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 ont pour coordonnées $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, z_3), (z_1, z_2, z_3)$ dans une base $(\vec{e_1}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$, pour toute forme trilinéaire antisymétrique f sur E :
$f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = kf\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ avec

$$k = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3. \overset{def}{=} \det_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)} (\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

51) (cas général de 50) ; montrer que si n vecteurs $\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}$ d'un espace vectoriel de dimension n ont pour coordonnées dans une base $\mathrm{B} = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right)$ une matrice A, alors pour toute forme n - linéaire alternée f sur E on a $f(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}) = kf\left(\overrightarrow{e_1},..,\overrightarrow{e_i},...,\overrightarrow{e_n}\right)$ avec

$$k = \sum_{\sigma \in S_n} \text{signature}(\sigma) A(\sigma(1),1) \quad \ldots. A(\sigma(n),n)$$

52) 51) étant connu, ainsi que la linéarité et l'antisymétrie de $\det_{\mathrm{B}}$, montrer $(\overrightarrow{x_1},....,\overrightarrow{x_n})$ est libre ssi $\det_{\mathrm{B}}(\overrightarrow{x_1},....,\overrightarrow{x_n}) \neq 0$.

53) Montrer que $\det_{\mathrm{B}}(f(\mathrm{B}))$ ne dépend pas de la base B.

54) Montrer que $\det f \circ g = \det f \det g = \det g \circ f$ et en déduire, pour f inversible $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det f}$.

55) Démontrer que $\det_{\mathrm{B}}(f(\overrightarrow{x_1}),....,f(\overrightarrow{x_n})) = \det f \times \det_{\mathrm{B}}(\overrightarrow{x_1},...,\overrightarrow{x_n})$.

56) Montrer que $\det(A)$ reste inchangé si on ajoute à une ligne (resp. colonne) de A une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).

57) Énoncer et démontrer les formules de Cramer, pour un système linéaire d'ordre n.

58) Définir la relation "avoir la même orientation que" parmi les bases d'un espace vectoriel réel de dimension n et montrer que c'est une relation d'équivalence ayant exactement deux classes d'équivalence.

59) Facultatif : Montrer qu'un automorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie est direct (resp. indirect) ss'il transforme une base donnée en une base de même orientation (resp. d'orientation contraire)) , ss'il conserve (resp. inverse) l'orientation de toutes les bases.

60) Etudier le caractère direct ou indirect des homothéties, des symétries.

A9. ESPACES EUCLIDIENS.

1) Donner la définition du produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n (\approx M_{n,1}(\mathbb{R}))$ et $M_{n,p}(\mathbb{R})$, montrer que c'est bien un produit scalaire et montrer que dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$, il peut s'écrire $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

2) Donner la définition du produit scalaire usuel dans $C([a,b],\mathbb{R})$ $(a < b)$; montrer que c'est bien un produit scalaire, ainsi que l'application : $(P \mid Q) = \int_a^b P(x)Q(x)dx$, dans $\mathbb{R}[X]$.

3) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que le cas d'égalité dans l'inégalité.

4) Définir la norme associée à un produit scalaire et montrer que c'est une norme.

5) Facultatif : Exprimer de 2 façons différentes le produit scalaire à partir de la norme ; montrer la relation d'Al Kashi.

6) Calculer $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$ et en déduire l'égalité du parallélogramme.

7) Définir l'orthogonal d'un vecteur, d'une partie ($X^{\perp} = \left\{\vec{y} \in E \ / \ \forall \vec{x} \in X \ \ \vec{y} \perp \vec{x}\right\} = \bigcap_{\vec{x} \in X} \vec{x}^{\perp}$), montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de E.

8) Définir l'orthogonalité (forte) de deux parties de E :
($X \perp Y \Leftrightarrow (\forall (\vec{x},\vec{y}) \in X \times Y \ \ \vec{x} \perp \vec{y}) \Leftrightarrow X \subset Y^{\perp} \Leftrightarrow Y \subset X^{\perp}$) et montrer que :

$$\mathrm{Vect}((x_i)) \ \perp Y \Leftrightarrow \forall i, \forall \vec{y} \in Y \ \ \vec{x}_i \perp \vec{y}$$

9) Montrer qu'une somme de sous-espaces deux à deux orthogonaux est toujours directe.

10) Montrer qu'une famille orthogonale (en incluant dans la définition la non nullité des vecteurs) est toujours libre.

11) Procédé de Schmidt : montrer que si $\mathsf{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base d'un espace euclidien E, il existe une base orthogonale $\mathsf{C} = (\vec{f}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $\forall k \in [1,n] \quad \mathrm{Vect}(\vec{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant p} = \mathrm{Vect}(\vec{f}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

12) Facultatif : Montrer que si $\mathsf{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base d'un espace euclidien E, il existe une unique base orthonormée $\mathsf{D} = (g_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $\forall k \in [1,n] \quad \mathrm{Vect}(\vec{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant k} = \mathrm{Vect}(\vec{f}_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ et $\left(\vec{e}_k \mid \vec{f}_k\right) > 0$.

13) Déduire de 11) le théorème de la base orthonormée incomplète.

14) Déduire de 13) le fait que dans un espace euclidien, l'orthogonal d'un sous-espace est un supplémentaire de ce sous-espace.

15) Montrer que si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux d'un espace euclidiens alors $G = F^{\perp}$ et $F = G^{\perp}$ (donc $(F^{\perp})^{\perp} = F$) .

16) Facultatif : Donner la définition d'une projection orthogonale et démontrer la caractérisation :

$$p \in L(E),\ p^2 = p,\ \forall \vec{x},\vec{y} \in E \quad (\vec{x} \mid p(\vec{y})) = (p(\vec{x}) \mid \vec{y}).$$

17) Donner l'expression d'une projection orthogonale, connaissant une base orthonormée de son image.

Donner par exemple l'expression de la projection orthogonale de base une droite $D = \mathrm{Vect}\left(\vec{n}\right)$ et en déduire l'expression de la projection orthogonale de base $\vec{n}^{\perp}$.

18) Facultatif : Donner la définition d'une symétrie orthogonale et démontrer la caractérisation :

$$s \in L(E),\ s^2 = id_E,\ \forall \vec{x},\vec{y} \in E \quad (\vec{x} \mid s(\vec{y})) = (s(\vec{x}) \mid \vec{y}).$$

19) Donner la définition d'une symétrie orthogonale et démontrer la caractérisation :

$$s \in L(E),\ s^2 = id_E,\ \forall \vec{x} \in E \quad \|s(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|.$$

20) Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien et montrer que c'est un automorphisme.

21) Montrer qu'un automorphisme orthogonal conserve le produit scalaire.

22) Facultatif : montrer qu'une application conservant le produit scalaire est linéaire.

23) Montrer que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

24) Montrer qu'un endomorphisme de matrice A dans une base orthonormée est orthogonal ssi A est inversible d'inverse ${}^tA$.

25) Donner et démontrer l'interprétation sur les lignes et les colonnes de la matrice A des relations ${}^tAA = I_n$ et $A{}^tA = I_n$.

26) Montrer que les automorphismes orthogonaux ont un déterminant égal à ±1, définir $SO(E) = O^{+}(E)$ et montrer que c'est un ss-groupe de $O(E)$.

27) Montrer que $SO_2(\mathsf{R}) = O_2^{+}(\mathsf{R})$ est l'ensemble des matrices $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

28) En déduire que $SO(P)$ (P plan euclidien) est commutatif. En déduire qu'une rotation de P (i. e. élément de $SO(P)$) a même matrice dans toute base orthonormée directe de P ; définir (la mesure de) son angle, si l'on oriente P.

ANALYSE

B3. FONCTIONS NUMÉRIQUES , niveau 2.

B3 I) COMPLÉMENTS SUR R.

1) Enoncer et démontrer la caractérisation "en ε" de la borne supérieure d'une partie majorée de R.

2) Enoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure d'une partie de R.

3) Montrer qu'il y a identité entre les intervalles et les convexes de $\overline{\mathsf{R}}$.

4) Montrer que Q et $\mathsf{R} \setminus \mathsf{Q}$ sont denses dans R.

5) Structure de l'ensemble R^I des fonctions réelles définies sur I muni de l'addition et de la

multiplication (anneau commutatif non intègre).

B3 II)LIMITES, CONTINUITE EN UN POINT.

6) Démontrer à l'aide de la définition des limites que $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

7) Donner un exemple de fonction définie au voisinage de 0 n'ayant de limite stricte ni à droite ni à gauche en 0.

8) Montrer que si pour toute suite (u_n) d'éléments de l'ensemble de définition de f convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ a pour limite l, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

(fait en cours uniquement pour x_0 et l finis)

B3 III) COMPARAISON DES FONCTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT.

9) Montrer que si lorsque x tend vers x_0, $f(x) \sim g(x)$, alors $o(f(x)) = o(g(x))$ et que, lorsque x tend vers x_0, $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$.

10) Montrer que $\lambda o(f(x)) + \mu o(f(x)) = o(f(x))$ et que $o(o(f(x)) = o(f(x))$.

11) Montrer que si $\alpha < \beta$, $x^\alpha(\ln(x))^\gamma << x^\beta(\ln(x))^\delta$ quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la relation similaire en 0.

12) Sachant que $\sin x \sim x$ quand x tend vers 0, montrer que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

13) Connaissant les développements limités à l'ordre 1 quand x tend vers 0 de e^x et de $\ln(1+x)$, en déduire celui de $(1+x)^\alpha$.

14) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x+4} - \sqrt[3]{3x+8}}{\sqrt{x+1} - 1}$.

B3 IV) CONTINUITÉ GLOBALE.

15) Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont lipschitziennes sur $[\varepsilon, +\infty[$ $(\varepsilon > 0)$, et que $x \mapsto x^2$ est lipschitzienne sur $[-A, A]$.

16) Facultatif : Montrer que f est uniformément continue sur I ssi pour toutes suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I, $\lim(u_n - v_n) = 0 \Rightarrow \lim(f(u_n) - f(v_n)) = 0$.

17) Montrer qu'une fonction uniformément continue sur I est continue sur I et montrer que la réciproque est fausse.

18) Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I et montrer que la réciproque est fausse.

19) Facultatif : montrer que toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

20) Montrer le lemme de Bolzano (annulation d'une fonction continue qui change de signe).

21) En déduire le théorème des valeurs intermédiaires.

22) En déduire que si f est continue sur un intervalle I, $f(I)$ est un intervalle et que donc si $\alpha = \inf\limits_{x \in I} f(x)$ et $\beta = \sup\limits_{x \in I} f(x)$, $f(I) = [\alpha, \beta], [\alpha, \beta[,]\alpha, \beta]$ ou $]\alpha, \beta[$.

23) Montrer que tout réel $\geqslant 0$ possède une unique racine carrée $\geqslant 0$, que tout réel possède une unique racine cubique et que, plus généralement, toute fonction polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

24) Facultatif : montrer qu'une fonction continue, injective (i.e. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$) sur un intervalle I, y est strictement monotone.

25) Montrer que si I est ouvert, les 4 possibilités du 22) peuvent arriver, mais énoncer ce qui se passe lorsque f est strictement monotone sur I, ou lorsque I est un segment (théorème de Weierstrass).

26) Démontrer le théorème de Weierstrass.

27) Montrer que si f continue sur $\mathbb{R}$ vérifie $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$, alors $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$. On énoncera les 4 étapes de la démonstration et en démontrera 2.

28) En utilisant 27) déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)f(y)$ et les fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^* \quad f(xy) = f(x)+f(y)$.

B3 V) DÉRIVATION.

1) Montrer que si f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $\forall x,y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)+f(y)$, alors $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$.

2) Montrer qu'une fonction croissante sur $]x_0 - \alpha_0, x_0]$ admet une limite stricte à gauche en x_0. (Le théorème de la limite monotone étant qu'une fonction monotone sur une partie de $\mathbb{R}$ admet une limite stricte à gauche et à droite en tout point adhérent à cette partie).

3) Montrer qu'une fonction croissante sur un intervalle ouvert I telle que $f(I)$ soit un intervalle est continue sur I (le théorème général étant qu'une fonction monotone sur une partie quelconque I telle que $f(I)$ soit un intervalle est continue sur I).

4) En déduire que la fonction réciproque d'une fonction f continue strictement monotone sur un intervalle I est continue sur $f(I)$.

5) Dérivabilité d'une fonction réciproque.

6) Montrer que la fonction

$$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (sans avoir recours au théorème de la limite de la dérivée).

7) Montrer que la fonction

$$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x}) \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0 (autrement dit que cette fonction n'est pas de classe C^1).

8) Somme, produit de deux fonctions C^k.

9) Formule de Leibniz.

10) Facultatif : Inverse d'une fonction C^k.

11) Facultatif : Composée de 2 fonctions C^k.

12) Facultatif : Fonction réciproque d'une fonction de classe C^k.

13) Montrer que si f est définie au voisinage de x_0, dérivable en x_0 et extrémale en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

14) Théorème de Rolle.

15) Montrer que si une fonction n fois dérivable sur un intervalle y possède $n+1$ racines, sa dérivée n-ième y possède au moins une racine.

16) Facultatif : Montrer que $L_n = D^n((X^2-1)^n)$ possède n racines réelles distinctes comprises entre -1 et 1, et qu'il est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

17) Soit f une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, q la somme des ordres de ses racines réelles et q' la somme des ordres des racines réelles de f'. Montrer que $q' \geqslant q-1$.

18) Théorème des accroissements finis.

19) Inégalités des accroissements finis.

20) Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle I, dérivable sur $I \setminus \{\text{bornes de } I\}$, est croissante (resp. constante) sur I ssi sa dérivée y est $\geqslant 0$ (resp. $= 0$). Donner des ctre-exemples si I n'est pas un intervalle.

21) Donner et démontrer (sachant 20)) une CNS pour qu'une fonction continue sur un intervalle I, dérivable sur $I \setminus \{\text{bornes de } I\}$, soit strictement croissante sur I.

22) Montrer qu'une fonction à dérivée bornée sur I est lipschitzienne sur I.

23) Théorème du passage à la limite dans la dérivée : montrer que si f est continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$, et si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$, alors $f'(x_0) = l$.

B3 VI) FORMULE DE TAYLOR-YOUNG.

23bis) Facltatif : Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré $\leqslant n$ prenant la même valeur en x_0 qu'une fonction f, ainsi que ses n dérivées successives (noté $T_{(n,f,x_0)}$).

24) Déterminer $T_{(n,f,0)}(x)$ pour f = exp, cos, sin, ch, sh, $f(x) = (1+x)^\alpha$.

25) Montrer que $T'_{(n,f,x_0)} = T_{(n-1,f',x_0)}$.

26) Déterminer $T_{(n,f,0)}(x)$ pour $f(x) = \ln(1+x)$ en utilisant 27).

27) Montrer que pour $f(x) = 1/\sqrt{(1+x)}$, $T_{(n,f,0)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} x^k$.

B3 VII) DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

28) Démontrer le théorème de TAYLOR-YOUNG pour une fonction g vérifiant $g^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0,..,n$.

29) Montrer que le cas général (pour une fonction n fois dérivable en x_0) se ramène au cas précédent.

30) Énoncer les développements limités polynomiaux de e^x, ch x, sh x, sin x, cos x, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{(1-x)^\alpha}$ à l'ordre n en 0.

31) Retrouver le D L P de $\frac{1}{1-x}$ en 0 par une méthode directe.

32) Preuve de l'unicité du développement limité polynomial à l'ordre n en x_0.

33) Parité du DLP en rapport avec celle de la fonction.

34) Déterminer le développement limité à l'ordre $2p+1$ en 0 de $1/(1+x^2)$ et en déduire celui d'arctan à l'ordre $2p+2$.

35) Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de $1/\sqrt{(1-x^2)}$ et en déduire celui d'arcsin à l'ordre 8.

36) Déterminer les développements limités polynomiaux de tan et th en 0 à l'ordre 5.

37) Déterminer des développements généralisés limités à trois termes de cot x et coth x en 0.

38) Déterminer des développements généralisés limités à trois termes de $\sqrt{x+1}$ et $\ln(x+1)$ en l'infini.

39) Montrer que $\arccos(1-x) = 2\arcsin\frac{\sqrt{2x}}{2}$ $(x \geqslant 0)$ et en déduire un développement limité généralisé à trois termes de $\arccos(1-x)$ en 0 et que $x \mapsto \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x}}$ admet des DLP à tout ordre en 0.

40) Facultatif : Donner les propriétés de f et dessiner l'allure de sa courbe que l'on peut déduire des développements limités :

a) au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x) = 1 - x - x^2 + o(x^2)$, $f(x) = 1 - \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$.

b) au voisinage de $+\infty$: $f(x) = -x - 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x) = -x + \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$, $f(x) = \sqrt{x} - 2 + o(1)$.

B3 VIII) ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

41) Montrer qu'on obtient la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation homogène associée.

42) Résoudre l'e. d. l. du 1er ordre homogène : $a(x)y' + b(x)y = 0$ (hypothèses sur a et b ?) sur un intervalle où la fonction a ne s'annule pas.

43) Présenter la méthode de variation de la constante.

44) Enoncer sans démonstration les résultats concernant les solutions de l'équation

différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$)

45) Résoudre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'équation différentielle de 44) dans le cas où l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes.

46) Résoudre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'équation différentielle de 44) dans les cas où l'équation caractéristique possède une solution double.

47) Lorsque l'équation caractéristique ne possède pas de solution réelle, montrer comment on obtient les solutions réelles de l'équation différentielle à partir des solutions complexes.

48) Résoudre et discuter l'équation différentielle : $x'' + \omega_0^2\, x = \cos(\omega t)$ ($\omega_0, \omega > 0$) en utilisant les résultats du cours.

B3 IX) INTÉGRALE DE RIEMANN.

1) Donner un exemple de fonction continue par morceaux sur un segment $[0,1]$, qui n'est pas C^1 par morceaux ; donner un exemple de fonction non continue par morceaux sur $[0,1]$.

2) Facultatif : Montrer qu'une fonction continue par morceaux sur un segment (CM) est bornée sur ce segment.

3) Facultatif : Pour une fonction bornée sur un segment, donner les définitions des intégrales inférieures et supérieures $I^-(f)$ et $I^+(f)$ et donner un exemple ou $I^-(f) < I^+(f)$.

4) Facultatif : Sachant que $I^-(f) = I^+(f)$ ss'il existe une suite (g_n) de fonctions en escalier minorantes et une suite (h_n) de fonctions en escalier majorantes telles que $\lim(I(h_n) - I(g_n)) = 0,$ montrer que pour une fonction croissante $I^-(f) = I^+(f)$.

4) bis (facultatif) : sachant que $I^-(f) = I^+(f)$ ss'il existe une suite (g_n) de fonctions en escalier minorantes et une suite (h_n) de fonctions en escalier majorantes telles que $\lim(I(h_n) - I(g_n)) = 0,$ montrer que pour une fonction continue $I^-(f) = I^+(f)$.

5) Montrer que si f est continue positive ou nulle sur $[a,b]$ ($a \neq b$) et non nulle en au moins un point de $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

6) En déduire que si f est de signe constant et continue sur $[a,b]$ ($a \neq b$) d'intégrale nulle, alors elle est nulle en tout point de $[a,b]$; donner un contre-exemple dans les cas où l'on supprime l'une des deux hypothèses "de signe constant" et "continue" ; application à la croissance stricte de l'intégrale des fonctions continues sur un segment non réduit à un point.

7) Montrer que si f est CM sur I et $x_0 \in I$ la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est continue sur I.

8) Avec les notations du 7), montrer que si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l,$ alors $F'_d(x_0) = l.$

9) En déduire que toute fonction continue sur un intervalle y possède une primitive et montrer qu'elle possède une unique primitive prenant une valeur donnée en un point donné.

10) Montrer que si F est une primitive d'une fonction continue sur $[a,b]$,
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\text{def}}{=} [F(x)]_a^b$.

B3 X) FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL

11) Montrer, en intégrant par parties son reste $\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$, la formule de Taylor avec reste intégral.

12) Déduire de cette formule l'inégalité de Taylor-Lagrange.

13) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

14) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \sin(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

15) Montrer que $\forall x \in [0,1] \quad \ln(1+x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$.

16) Donner la définition des sommes de Riemann d'une fonction CM sur un segment et énoncer le théorème correspondant (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision de pas $< \alpha$ la différence entre l'intégrale et toute somme de Riemann associée à la

subdivision est majorée par ε en valeur absolue).

17) 16) étant connu, donner, pour f CM sur $[0,1]$, un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

B4. SÉRIES

1) Montrer que (u_n) et $\Sigma(u_n - u_{n-1})$ sont de même nature. Appliquer à $u_n = 1/n$.

2) Séries géométriques : convergence et somme.

3) Critère de comparaison pour une SATP (en $\leqslant$, en O, en o).

4) Critère de l'équivalent pour une SATP.

5) Détermination d'un équivalent de $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ pour $\alpha > 1$, et application à la convergence des séries de Riemann .

7) Montrer l'équivalence entre la convergence d'une série et d'un intégrale (bien donner les hypothèses).

8) Montrer qu'une série absolument convergente est convergente.

9) Facultatif : montrer qu'une série aux signes alternés, dont le terme général tend en valeur absolue vers 0 en décroissant, est convergente.

B5. PROBABILITÉS. NIVEAU 2.

1) Définir la loi uniforme et la loi de Bernouilli, donner leur espérance, et donner un exemple concret où elles s'appliquent.

2) Démontrer l'inégalité de Markov : $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$.

3) Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X-m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

4) Définir l'indépendance de deux variables aléatoires (sur un espace fini), et démontrer l'indépendance des évènements liés à l'une et à l'autre.

5) Définir la covariance, et démontrer : $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

6) Montrer $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$ et en déduire la variance d'une somme de 2 variables aléatoires non corrélées.

7) Montrer que deux varaibles aléatoires indépendantes sont non corrélées.

8) définir l'indépendance mutuelle des évènements et des variables aléatoires.